Devoir surveillé n°1 - corrigé

Exercice 1

1. La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(400, 40)$, donc la variable T définie par $T = (X - 400)/40$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
   On a donc $P(X \leq 318) = P(X - 400 \leq 318 - 400) = P\left(\frac{X-400}{40} \leq \frac{318-400}{40}\right)$
   $= P\left(T \leq \frac{318-400}{40}\right) = P(T \leq -2,05) = P(T \geq 2,05)$ vu la symétrie de la courbe de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$
   $= 1 - \Pi(2,05) = 1 - 0,979\,8$ soit $P(X \leq 318) = 0,0202$
2. (a) On procède 50 fois de suite à l'expérience « *prélever un moteur dans la production* ». Les **50 tirages sont considérés indépendants**, et il n'y a **que deux issues** qui nous interressent : le moteur tiré est ou non commercialisable, la probabilité qu'un moteur soit non commercialisable étant $p = 0,02$. On est dans le cadre d'un schéma de Bernouilli, et la variable Y suit la loi binômiale $\mathcal{B}(50\,; 0,02)$.
   (b) Si l'on a au plus trois moteurs non commercialisables, c'est que $Y \leq 3$.
   D'où le calcul suivant, en notant $p = 0,02$ et $q = 1 - p = 0,98$:
   $p(Y \leq 3) = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) + p(Y = 3)$

   $= C_{50}^0 p^0 q^{50} + C_{50}^1 p^1 q^{49} + C_{50}^2 p^2 q^{48} + C_{50}^3 p^3 q^{47}$

   $= q^{50} + 50pq^{49} + \frac{50\times49}{2}p^2q^{48} + \frac{50\times49\times48}{3\times2}p^3q^{47}$

   $\approx 0,364\,2 + 0,371\,6 + 0,185\,8 + 0,060\,7$ soit $p(Y \leq 3) \approx 0,982\,2$

Exercice 2

1. X suit une loi binomiale car il s'agit d'une expérience que l'on peut assimiler à un tirage aléatoire à deux issues (en panne ou non), qui se répète 150 fois, de manière indépendante. Sachant que 2% des ordinateurs tombent en panne, $p = 0,02$.On notera $q = 1 - p$.
   - $P(A) = P(X = 5) = C_{150}^5 p^5 q^{145} = 0,101$
   - $P(B) = P(X \leq 3) = C_{150}^0 p^0 q^{150} + C_{150}^1 p^1 q^{149} + C_{150}^2 p^2 q^{148} + C_{150}^3 p^3 q^{147} = 0,647$
   - $P(C) = P(4 \leq X \leq 6) = C_{150}^4 p^4 q^{146} + C_{150}^5 p^5 q^{145} + C_{150}^6 p^6 q^{144} = 0,320$
2. $\lambda = np = 3$
3. - $P(A) = \dfrac{e^{-3}3^5}{5!} = 0,101$
   - $P(B) = P(X \leq 3) = \dfrac{e^{-3}3^0}{0!} + \dfrac{e^{-3}3^1}{1!} + \dfrac{e^{-3}3^2}{2!} + \dfrac{e^{-3}3^3}{3!} = 0,647$
   - $P(C) = P(4 \leq X \leq 6) = \dfrac{e^{-3}3^4}{4!} + \dfrac{e^{-3}3^5}{5!} + \dfrac{e^{-3}3^6}{6!} = 0,319$
4. les résultats obtenus diffèrent de moins de 1%

Exercice 3

1. L'équation différentielle

   (E_0) $$y'' - 4y = 0$$

   a pour équation caractéristique $r^2 - 4 = 0$ qui a pour solutions $r = -2$ et $r = 2$.
   Donc la solution générale s'écrit sous la forme : $y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x} \quad$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. Pour vérifier que g est solution de (E), on calcule $g'' - 4g$.

   $$g' = \frac{4}{3}(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = \frac{4}{3}e^{-2x}(1-2x)$$
   $$g'' = \frac{4}{3}(-2e^{-2x}(1-2x) - 2e^{-2x}) = \frac{4}{3}e^{-2x} = \frac{-16}{3}e^{-2x}(1+x)$$

   donc $g'' - 4g = \dfrac{-16}{3}e^{-2x}(1+x) - 4 \times \dfrac{4}{3}xe^{-2x} = \dfrac{-16}{3}e^{-2x}$
   Donc g est bien solution de (E).
3. L'ensemble des solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :
   $y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x} + \dfrac{4}{3}xe^{-2x} \quad$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
4. On a $h(0) = \dfrac{4}{3}$ ce qui donne $\lambda + \mu = \dfrac{4}{3}$
   D'autre part, $h'(x) = -2\lambda e^{-2x} + 2\mu e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-2x}(1-2x)$
   Comme $h'(0) = -\dfrac{4}{3}$, on a $-2\lambda + 2\mu + \dfrac{4}{3} = -\dfrac{4}{3}$
   On obtient le système suivant :

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{4}{3} \\ -2\lambda + 2\mu + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

   Et on trouve
   $$\lambda = \frac{4}{3} \quad et \quad \mu = 0$$

   La solution h s'écrit donc :

   $$h(x) = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x} = \frac{4}{3}e^{-2x}(x+1)$$