DEVOIR SURVEILLE n°1
corrigé

Exercice 1: *(4 points)*

1. $A = \ln\left(\frac{75}{256}\right) = \ln 75 - \ln 256 = 2\ \ln 5 + \ln 3 - 8\ \ln 2 \quad B = \ln 120 = 3\ \ln 2 + \ln 3 + \ln 5$

2.
$\ln(\sqrt{6}-1) + \ln(\sqrt{6}+1) - \ln\sqrt{100} - \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

$= \ln((\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)) - \ln(\sqrt{100}) - \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

$= \ln(6-1) - \ln(10) - \ln 1 + \ln 8$

$= \ln 5 - \ln 10 + \ln 8 = \ln\left(\frac{5}{10}\right) + \ln 8 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 8 = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln 4 = 2\ \ln 2$

Exercice 2: *(4 points)*

1. a) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

b) $x^2\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2\ \ln x}{x^2}\right) = x^2 - 2 - 2\ \ln x$ Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ car $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Problème: *(12 points)*

I.

1. a) $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

2.

x	0		1		3		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0	$\nearrow$	1

II. 1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} = \lim_{x \to +\infty}\left(x^2 \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{x^2}\right) = a$ donc d'après 1.b) on a $a = 1$

2. $g(1) = 0$ et $g(3) = 0$ donc on a le système suivant:

$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \dfrac{9\ a + 3\ b + c}{9} = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9\ a + 3\ b + c = 0 \end{cases}$

3. On sait que $a = 1$ donc on obtient:

$\begin{cases} b+c=-1 \\ 3\,b+c=-9 \end{cases}$ c'est à dire $2\,b=-8$ soit $b=-4$ et $c=3$

l'expression de $g(x)$ est donc $g(x)=\ x^2-4\,x+3$

I. a) $f(x)=x\left(-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4\ln x}{x}+1\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ =+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\ \dfrac{\ln x}{x}=0$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}(-3-4\,x\ln x+x^2)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\ -\dfrac{3}{x}=-\infty$

2. a) $f'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x}+1=\dfrac{x^2-4\,x+3}{x^2}$ donc $f'(x)=g(x)$

b) Comme $f'(x)=g(x)$ est négatif sur $[1\,;3]$ on obtient le tableau de variation suivant:

x	0		1		3		$+\infty$
signe de f'		+		-		+	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	2-4ln3	↗	$+\infty$

c) $f(1)=-2$ et $f(3)=2-4\ln 3$

II. 1. a) f n'admet pas de solution dans l'intervalle]0,3[car $f(1)<0$

b) admet une solution unique, notée α, dans l'intervalle [3,10] car $f(3)<0$ et $f(10)>0$

c) n'admet pas de solution dans l'intervalle]10;+∞[car $f(10)>0$

2.

x	$f(x)$
9,15	-0,032
9,16	-0,026
9,17	-0,02
9,18	-0,014
9,19	-0,008
9,20	-0,002
9,21	0,003
9,22	0,009
9,23	0,0151
9,24	0,0211
9,25	0,0271

donc $9{,}20\leqslant\alpha\leqslant 9{,}21$