Devoir surveillé n°4

Exercice 1 *(4 points)*

1. On note $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (2x+2)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $I = 4$.
2. On note $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 2 *(3 points)*

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(15, 2)$. Par lecture de la table, calculer :

1. $p(X \leq 18)$.
2. $p(X \geq 12)$.
3. $p(12 \leq X \leq 18)$.

Exercice 3 *(3 points)*

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 4)$. Par lecture de la table, déterminer le nombre a tel que :

1. $p(X \leq a) = 0,99$.
2. $p(X \leq a) = 0,01$.
3. $p(X \geq a) = 0,05$.

Exercice 4 *(4 points)*

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson. Déterminer à 10^{-2} près le paramètre λ sachant que $P(X = 0) = 0,3$.
   (*Indication* : Utiliser la définition de la loi de Poisson.)
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 7. Déterminer la plus petite valeur de k vérifiant $P(X \leq k) \geq 0,080$.

Exercice 5 *(6 points)*

On dispose d'une feuille de carton rectangulaire, de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle.

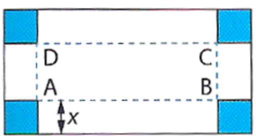

Figure 1

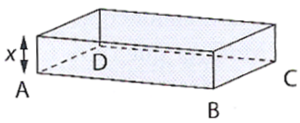

Figure 2

Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux, aux quatre coins (figure 1), puis on plie le carton suivant les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. On obtient alors la boîte de la figure 2.

On appelle x la mesure en cm du côté de chaque carré découpé.

1. Préciser dans quel intervalle I peut varier x pour que la boîte soit réalisable.
2. Montrer que le volume de la boîte (en cm^3) s'écrit en fonction de x,

$$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

3. Etudier les variations de la fonction V sur I, et en déduire la valeur de x qui rend maximal le volume de la boîte obtenue.

   Quelles sont alors les dimensions et le volume de la boîte obtenue ?