Corrigé DS n°4

Exercice 1 *(4 points)*

1. $I = \int_{-1}^{1} (2x+2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = 3 - (-1)^2 + 2 = 4$
2. Intégrons par parties $I = \int_{-1}^{1} (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

   En posant
   $$u(x) = x+1 \qquad v'(x) = e^x$$
   on a
   $$u'(x) = 1 \qquad v(x) = e^x$$
   Et en appliquant la formule d'intégration par parties,
   $$J = \left[e^x(e^x+1)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = 2e - \left[e^x\right]_{-1}^{1} = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$$
   .

Exercice 2 *(3 points)*

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(15, 2)$.
En posant $T = \dfrac{X-15}{2}$, on obtient :

1. $P(X \leq 18) = P(\dfrac{X-15}{2} \leq \dfrac{18-15}{2}) = P(T \leq 1,5) = 0,9332$
2. $P(X \geq 12) = P(T \geq -1,5) = P(T \leq 1,5) = 0,9332$
3. $P(12 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 12) = 0,9332 - (1 - 0,9332) = 0,8664$

Exercice 3 *(3 points)*

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 4)$.
En posant $T = \dfrac{X-0}{4} = \dfrac{X}{4}$, on obtient :

1. $P(X \leq a) = 0,99 \Leftrightarrow P(T \leq \dfrac{a}{4}) = 0,99$

   Par lecture de la table, on obtient $\dfrac{a}{4} = 2,32$, soit $a = 2,32 \times 4$ c'est à dire $a = 9,28$
2. $P(X \leq a) = 0,01 \Leftrightarrow P(X \leq -a) = 0,99 \Leftrightarrow P(T \leq \dfrac{-a}{4}) = 0,99$

   Par lecture inverse de la table, on obtient $\dfrac{-a}{4} = 2,32$, soit $-a = 2,32 \times 4$ c'est à dire $a = -9,28$

3. $P(X \geq a) = 0,05 \Leftrightarrow P(X \leq a) = 0,95 \Leftrightarrow P(T \leq \frac{a}{4}) = 0,95$
   Par lecture inverse de la table, on obtient $\frac{a}{4} = 1,645$, soit $a = 1,645 \times 4$ c'est à dire $a = 6,58$

Exercice 4 *(4 points)*

1. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson, on a
$$P(X=0) = 0,3 \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0,3 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -\lambda = \ln 0,3 \Leftrightarrow \lambda = 1,20$$
2. Si Xest une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 7, en utilisant la table, on trouve que 3 est le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,080$.

Exercice 5 *(6 points)*

1.]0,25[
2. $V(x) = (50-2x)(80-2x)x = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$
3. $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$.
   En calculant le discriminant $\Delta = 78400$ on trouve deux solutions $x_1 = 10$ et $x_2 = 33,33$, x_2 est éliminée car on se trouve sur l'intervalle $]0,25[$.
   Le polynôme $12x^2 - 520x + 4000$ est du signe de a, c'est à dire positif sur]0,10[, on obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0		10		25
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	18000	$\searrow$	0

   On voit que le volume est maximal lorsque $x = 10$, il vaut alors 18000 cm^3 pour une largeur de 30 cm et une longueur de 60 cm et une hauteur de 10 cm.