Nombres complexes

I. Rappels

I.1. Forme algébrique d'un nombre complexe

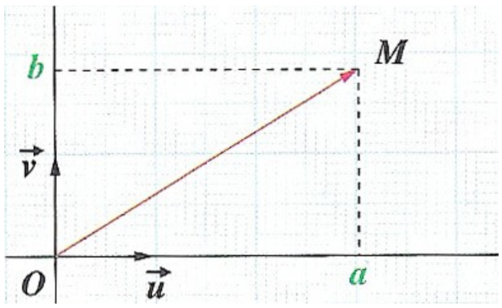
Définition 1

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$ s'appelle la **forme algébrique** *de z.*
a est la partie réelle de z. On note $a = \mathcal{R}e(z)$.
b est la partie imaginaire de z. On note $b = \mathcal{I}m(z)$.

I.2. Représentation graphique d'un nombre complexe

Définition 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, tout nombre complexe $z = a + bi$ est associé au point M de cordonnées (a, b)



- *On appelle* **module** *de z et on note $|z|$ le nombre égal à la distance OM :*

$$|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$$

- *On appelle* **argument** *de z et on note $arg(z)$, toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$*

Théorème 1

Le nombre complexe de module $|z|$ et d'argument θ s'écrit :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** *du nombre complexe z, et nous avons les relations suivantes :*

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

II. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 3

*Le nombre complexe de module $|z|$ et d'argument θ peut s'écrire $z = |z|e^{i\theta}$, c'est la **forme exponentielle**.*

Théorème 2

Nous avons les relations suivantes :

$$(e^{i\theta}) \times (e^{i\theta'}) = e^{i\theta+\theta'}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta-\theta'}$$

Exemple: Calculer $2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{\pi}{4}}$

III. Formules d'addition et de duplication des insus et cosinus

III.1. Formules d'addition

Théorème 3

Pou tous réels a et b, on a :

$\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$ $\qquad$ $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a$

$\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a$

III.2. Formules de duplication et de linéarisation

Théorème 4

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$ $\qquad$ $\sin(2a) = 2\sin a \times \cos a$

d'où les formules de linéarisation :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$