COMPLEXES

1. Présentation de l'ensemble des nombres complexes

Définition: Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes existe un imaginaire i qui vérifie $\boldsymbol{i^2=-1}$.

Tout nombre complexe est un nombre de la forme $a+bi$, où a et b sont deux nombres réels.

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$, en tenant compte du fait que $i^2=-1$.

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition: L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $\boldsymbol{z=a+bi}$ s'appelle la forme algébrique de z.

a est la partie réelle de z. On note $a=\Re(z)$

b est la partie imaginaire de z. On note $b=\Im(z)$

Exemple: Le nombre complexe $3+5\,i$ a pour partie réelle 3 et pour partie imaginaire 5.

Remarques: Les nombres complexes sont très utilisés en électricité. Pour éviter tout confusion avec l'intensité *i*, le nombre *i* est noté *j* en physique.

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est dit réel.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est dit imaginaire pur.

L'ensemble des réels est inclus dans l'ensemble des complexes.

Exemple: $z=-8\,i$ est imaginaire pur, $z=4+0\,i=4$ est réel.

3. Calculs dans $\mathbb{C}$

a. Egalité de deux nombres complexes

Définition: Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$a+bi=a'+b'i$ si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$

Exemple: Chercher tous les réels x et y tels que $(x-2)+(y-1)\,i=2-3\,i$

b. Addition des nombres complexes

Définition: On définit dans $\mathbb{C}$ une opération appelée addition notée + par:

$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')\,i$ si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$

Exemple: $z=5+3\,i$ et $z'=-2+i$ Calculer $z+z'$

c. Multiplication des nombres complexes

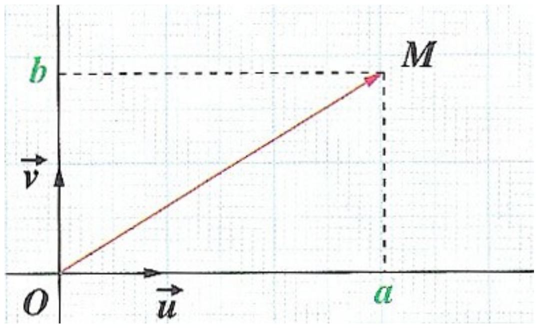
Définition: On définit dans $\mathbb{C}$ une opération appelée multiplication, notée $\times$ par

$(a+bi)\times(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)\,i$

Exemples: : $z=5+3\,i$ et $z'=-2+i$ Calculer zz' et z^2. Calculer i^2, i^3, i^4

4. Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, tout nombre complexe $z=a+bi$ est associé:
- soit au point M de coordonnées $(a\,,b)$
- soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $(a\,,b)$



On dit que:
- z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$
- M est le point image de z
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z

Exemple: Placer dans un repère les points A, B et C d'affixes respectives $-1+2\,i$*, 5 et* $3\,i$*.*

Représenter le vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $2+3\,i$

Remarques:

- L'axe $(0\;x)$ des abscisses est appelé l'axe des réels
- L'axe (Oy) des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires

5. Conjugué d'un nombre complexe

Définition: Soit le nombre complexe $z=a+bi$. On appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z}=a-bi$

Exemple: déterminer le conjugué de $z=-2+i$*. Représenter graphiquement ces 2 complexes.*

Remarque: Les points d'affixes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés: Soient deux nombres complexes z et z'.

Alors $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ et $\overline{zz'}=\bar{z}\times\bar{z'}$

6. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition: Soit $z=a+bi$ un nombre complexe non nul. On note M le point d'affixe z dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

- On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre égal à la distance OM: $|z|=OM=\|\overrightarrow{OM}\|$
- On appelle argument de z et on note arg (z), toute mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$

Exemple: Déterminer le module et l'argument de $z=2+2\,i$

Théorème: Le nombre complexe de module ρ et d'argument θ s'écrit:

$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ Cette écriture est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.