Loi binomiale - Loi de Poisson

1 Loi binomiale

1.1 Introduction :

Un lecteur mp3 contient $2/3$ de titres anglais et $1/3$ de titres français. On crée au hasard une playlist de 3 morceaux (avec possibilité de répéter plusieurs fois le même titre). Quelle est la probabilité d'obtenir 2 titres français dans cette playlist ?

1.2 Définition :

On considère une expérience aléatoire qui :
- a deux issues possibles (appelées succès de probabilité p et échec de probabilité $q = 1 - p$)
- se répète plusieurs fois (n fois)
- est indépendante des répétitions précédentes

Si on note X la variable aléatoire qui compte les succès, on a :

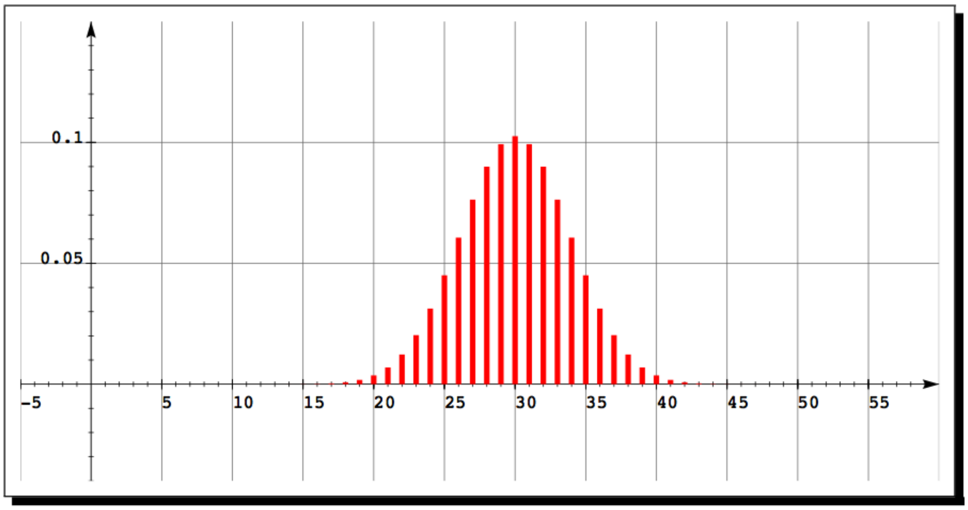
$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \backsim \mathcal{B}(n, p)$.

1.3 Exemple :

On lance une pièce de monnaie 60 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 25 Pile ?

$$P(X = 25) = C_{60}^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{35}$$



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60; 1/2)

1.4 Indicateurs de position et de dispersion :

Si $X \backsim \mathcal{B}(n, p)$ alors :
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

2 Loi de Poisson

2.1 Définition :

On dit qu'une variable aléatoire dénombrable X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une *loi de Poisson de paramètre* λ ($\lambda > 0$), si et seulement si, pour tout entier naturel k,

$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $\mathcal{P}(\lambda)$ cette loi, et on montre alors que son espérance, sa variance et son écart-type vérifient

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

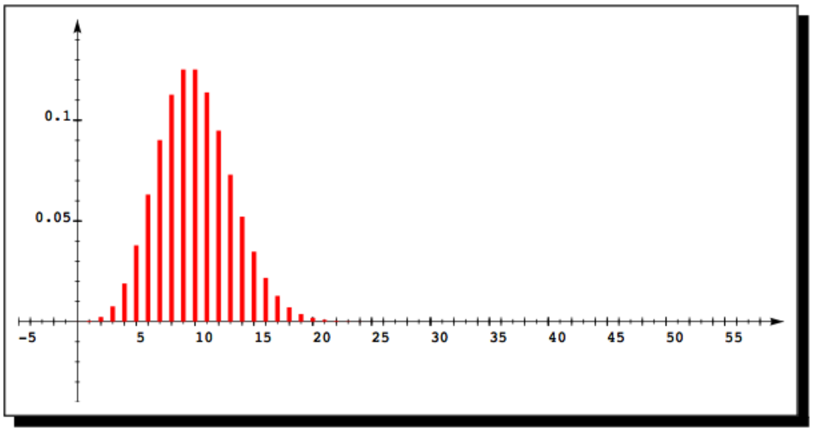
Dans la pratique, si n est « grand », p « voisin » de 0 et np pas « trop grand », on considère en général la loi de Poisson de paramètre np comme une *bonne approximation* de la loi binômiale. Plus précisément, si $n \geq 50$, $p \leq 0,01$ et $np \leq 10$, alors on considère que la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est « proche » de la loi $\mathcal{P}(np)$, ce qui permet d'utiliser la loi de Poisson (à un seul paramètre) plutôt que la loi binômiale (à deux paramètres).

On retiendra que, **sous certaines conditions, on peut approcher une loi binômiale par une loi de Poisson ayant la même espérance**.

2.2 Exemple :

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3. Déterminer la probabilité qu'un tel lot ait deux bouteilles défectueuses.

$$P(X = k) = e^{-3}\frac{3^2}{2!}$$



loi de Poisson de paramètre 10