Dérivation

Dans tout le chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

I. Taux d'accroissement d'une fonction

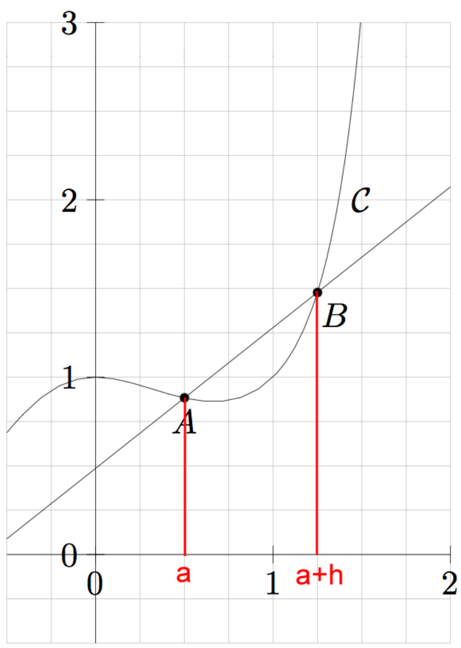
I.1. Définition :

Soient a et b deux nombres de I. ($a < b$) On appelle taux d'accroissement de la fonction f en a avec un pas de h et on note $T_a(h)$ le quotient :

$$T_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemples :
si f est la fonction carré, son taux d'accroissement en 2 avec un pas de h est : ....
si f est une fonction affine, que vaut son taux d'accroissement ?

I.2. Interprétation graphique :



Le taux d'accroissement d'une fonction en a avec un pas de h est le coefficient directeur de la droite (AB) (où A est le point de C_f d'abscisse a, B le point de C_f d'abscisse $a+h$)

II. Nombre dérivé

II.1. Approche de la notion de limite

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{sinx}{x}$, x exprimé en radians.

– Compléter le tableau suivant :

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$									

– Que se passe-t-il en 0 ?

On dira alors que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est ....

Exemple : Soit f définie par $f(h) = \dfrac{h^2 + 2h}{h}$

Déterminer la limite de f lorsque h tend vers 0.

II.2. Définition du nombre dérivé

On appelle nombre dérivé de f en a et on note $f'(a)$ le nombre :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

c'est la limite du taux d'accroissement de f en a quand h tend vers 0.

Exemple : la fonction carré en $a = 1$

II.3. Interprétation graphique :

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en a.

III. Fonction dérivée

Un exemple : la fonction carrée

f définie sur	par :	dérivable sur :	f' définie par :
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N})$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$[0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$

IV. Opérations de la dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I

Opération	Fonction	Dérivée
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit par un nombre	$k\times u \quad (k\in\mathbb{R})$	$k\times u'$
Produit	$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
Quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Fonction composée	$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Exemple de calcul :
$f(x)=\frac{1}{x}+2x^3$ a pour fonction dérivée $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+6x^2$
$f(x)=(2x-1)(3x^3)$ a pour fonction dérivée $f'(x)=2\times 3x^3+(2x-1)\times 9x^2=24x^3-9x^2$

V. Applications de la dérivation

Théorème :
On suppose que f est dérivable sur I.
- f est croissante sur $I \iff f'(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in I$
- f est décroissante sur $I \iff f'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in I$
- f est constante sur $I \iff f'(x)=0$ pour tout $x\in I$

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée

Exemple : Soit $f(x)=2x^2-8x+5$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Quel est son sens de variation ?
- Pour tout réel x on a $f'(x)=4x-8$
- On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

- f est décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$