Développements limités

I. Un exemple pour comprendre

La fonction exponentielle $f(t) = e^t$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$, ce qui s'écrit :

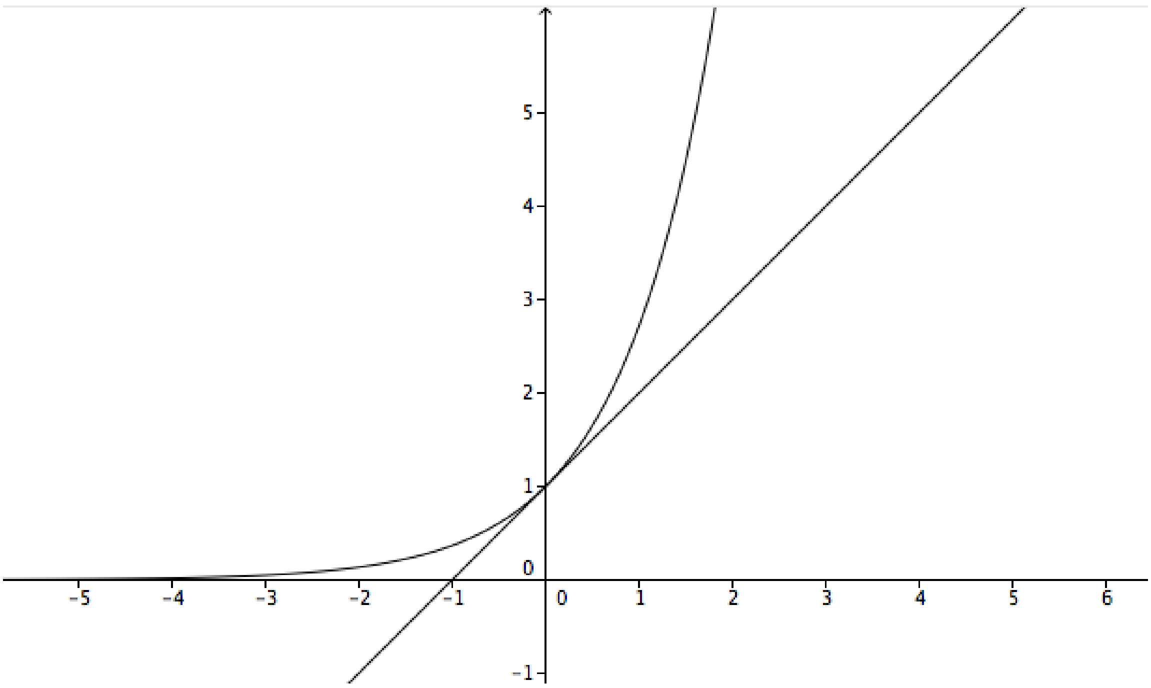
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = 1 \qquad \text{soit} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

ou bien, au voisinage de $t = 0$

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + t\epsilon_1(t) \quad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0} \epsilon_1(t) = 0$$

$$\text{soit, dans l'exemple } e^t = 1 + t + t\epsilon_1(t) \quad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0} \epsilon_1(t) = 0$$

Cette dernière expression signifie que le polynôme $1+t$ fournit une valeur approchée de e^t pour t voisin de 0.



On peut chercher une approximation plus précise de la courbe, en réitérant le procédé avec la dérivée seconde f'' :

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + x\epsilon_2(x) \quad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$$

et en intégrant :

$$\int_0^t f'(x)dx = \int_0^t f'(0)dx + \int_0^t xf''(0)dx + \int_0^t x\epsilon_2(x)dx$$

$$f(t) - f(0) = tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \int_0^t x\epsilon_2(x)dx$$

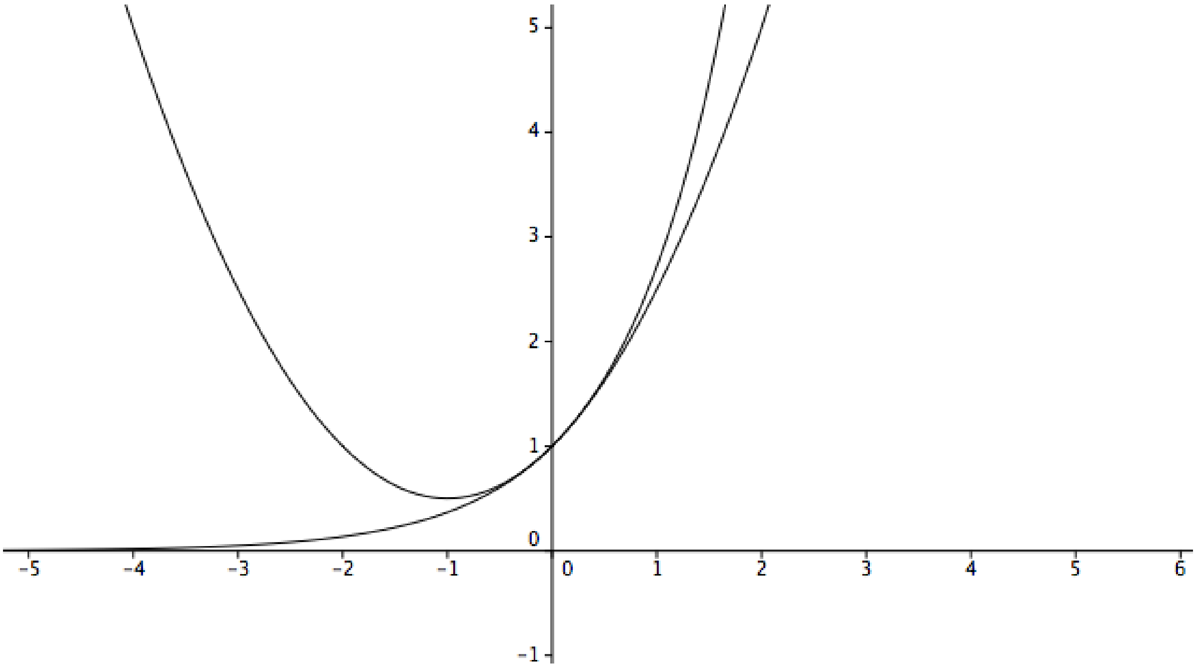
$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \int_0^t x\epsilon_2(x)dx$$

et en posant $\epsilon_3(t) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^t x\epsilon_2(x)dx$ on obtient l'égalité suivante :

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + t^2\epsilon_3(t)$$

et on prouve que $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon_3(t) = 0$. Dans notre exemple précédent, on a donc :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\epsilon_1(t) \quad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0}\epsilon_1(t) = 0$$



Ainsi on obtient, en généralisant, la formule de Taylor-Maclaurin :

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{3!}f^{(3)}(0) + ... + \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(0) + t^n\epsilon(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0$$

II. Développements limités des fonctions usuelles

(voir formulaire BTS)

III. Opérations algébriques

III.1. Somme de fonctions

Déterminons le dl d'ordre 3 en 0 de la fonction définie par :

$$f(t) = e^t + \frac{1}{1+t}$$

D'après le formulaire, on a les dl suivants :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\epsilon_1(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0}\epsilon_1(t) = 0$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^3\epsilon_2(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0}\epsilon_2(t) = 0$$

En ajoutant terme à terme et en posant $\epsilon(t) = \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$, on obtient :

$$f(t) = e^t + \frac{1}{1+t} = 2 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{6}t^3 + t^3\epsilon(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0$$

III.2. Produit de fonctions

Déterminons le dl d'ordre 3 en 0 de la fonction définie par :

$$f(t) = \sin t \cos t$$

On a :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3\epsilon_1(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0} \epsilon_1(t) = 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^3\epsilon_2(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0} \epsilon_2(t) = 0$$

donc

$$\sin t \cos t = \left(t - \frac{t^3}{6} + t^3\epsilon_1(t)\right)\left(1 - \frac{t^2}{2} + t^3\epsilon_2(t)\right)$$

$$\sin t \cos t = t - \frac{2}{3}t^3 + t^3\epsilon(t) \qquad \text{avec } \epsilon(t) = t\epsilon_2(t) + \frac{t^2}{12} - \frac{t^3}{6}\epsilon_2(t) + \epsilon_1(t) - \frac{t^2}{2}\epsilon_1(t) + t^3\epsilon_1(t)\epsilon_2(t)$$

et on a bien

$$\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$$

III.3. Composition

Déterminons le dl d'ordre 3 en 0 de la fonction définie par :

$$f(t) = \sin 2t$$

On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(t) \qquad \text{avec} \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

en posant $x = 2t$ on en déduit :

$$\sin 2t = 2t - \frac{(2t)^3}{6} + (2t)^3\epsilon_1(2t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0} \epsilon_1(2t) = 0$$

$$\sin 2t = 2t - \frac{8t^3}{6} + 8t^3\epsilon_1(2t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0} \epsilon_1(2t) = 0$$

en posant $\epsilon(t) = 8\epsilon_1(2t)$ on a le dl cherché :

$$\sin 2t = 2t - \frac{8t^3}{6} + t^3\epsilon(t) \qquad \text{avec} \lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$$