Equations différentielles

I. Introduction

Un équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction.Par exemple :

$$f' = f$$

$$2xf'(x) + 3f(x) = x$$

Notation : par convention, on note souvent y au lieu de f ce qui donne l'équation $y' = y$.

- Lorsque la dérivée intervient dans l'équation, c'est un équation différentielle du 1er ordre. Exemple : $y' - 3y = 5x$
- Lorsque la dérivée seconde intervient dans l'équation, c'est un équation différentielle du 2ème ordre. Exemple : $2xy'' - 2y + 3 = 0$

Remarque : On peut rencontrer (par exemple en physique) les notations $\dfrac{dy}{dx}$ pou y' ou bien $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ pou y''.

Exemple : Trouver des solutions des équations suivantes :
- $y' = 0$
- $y'' + y' + 3y = 6$
- $y' + y = 7x + 7$
- Montrer que la fonction $g(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = e^{-x}$.

En Terminale, on étudie les équations du type $y' + ay = b$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ avec a,b, ω réels.

II. Résolution de l'équation différentielle $y' + ay = b$

II.1. Cas de l'équation $y' + ay = 0$

Théorème 1

Soit l'équation $y' + ay = 0$, où a est un nombre réel et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{-ax}$$

où k est une constante réelle.

Exemple: Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' - 2y = 0$$

$$y' + 4y = 0$$

$$10y' - y = 0$$

II.2. Cas général $y' + ay = b$

Théorème 2

Soit l'équation $y' + ay = b$, où a et b sont des nombres réels ($a \neq 0$) et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$$

où k est une constante réelle.

Exemple: Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' + 2y = 3$$

$$y' - 4y = 1$$

III. Résolution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème 3

Soit l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel ($w \neq 0$) et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

où A et B sont des constantes réelles.

Exemple:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$y'' - y = 0$$

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

IV. Solutions vérifiant des conditions initiales

Exemple:
Déterminer la solution de l'équation $y' + y = -2$ qui vérifie $y(0) = 5$.
Déterminer la solution de l'équation $y'' + 4y = 0$ qui vérifie $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.