Equations différentielles

I. Introduction

Un équation différentielle est une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction.Par exemple :

$$f' = f$$

$$2xf'(x) + 3f(x) = x$$

Notation : par convention, on note souvent y au lieu de f ce qui donne l'équation $y' = y$.

- Lorsque la dérivée intervient dans l'équation, c'est un équation différentielle du 1er ordre. Exemple : $y' - 3y = 5x$
- Lorsque la dérivée seconde intervient dans l'équation, c'est un équation différentielle du 2ème ordre. Exemple : $2xy'' - 2y + 3 = 0$

Remarque : On peut rencontrer (par exemple en physique) les notations $\dfrac{dy}{dx}$ pou y' ou bien $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ pou y''.

II. Solutions d'une équation différentielle

Théorème 1

Toute équation différentielle admet une infinité de solutions.

Exemple : Trouver des solutions des équations suivantes :
- $y' = 0$
- $y'' + y' + 3y = 6$
- $y' + y = 7x + 7$
- Montrer que la fonction $g(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = e^{-x}$.

III. Résolution d'une équation différentielle homogène

III.1. Définition

Les équations du type $a(x)y' + b(x)y = 0$ et $ay'' + by' + cy = 0$ sont appelées équations homogènes (sans second membre)

III.2. Résolution

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Remarque :
On retrouve le théorème de Terminale : les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = ke^{ax}$$

Exercice :
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' - 2y = 0$$

$$y' = -\frac{y}{4}$$

$$y' + 4y = 0$$

$$10y' - y = 0$$

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$y'' - y = 0$$

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

IV. Résolution d'une équation différentielle quelconque

Théorème 2

La solution générale d'une équation différentielle est obtenue en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

V. Un exemple complet

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = 2x$$