Intégration

I. Définition de l'intégrale

Définition 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On appelle **intégrale** *de a à b et on note $\int_a^b f(x)dx$ le nombre réel défini par*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

Remarque: si F et G sont deux primitives de I, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ ce qui justifie la définition. La lettre x dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ est "variable muette", on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre.

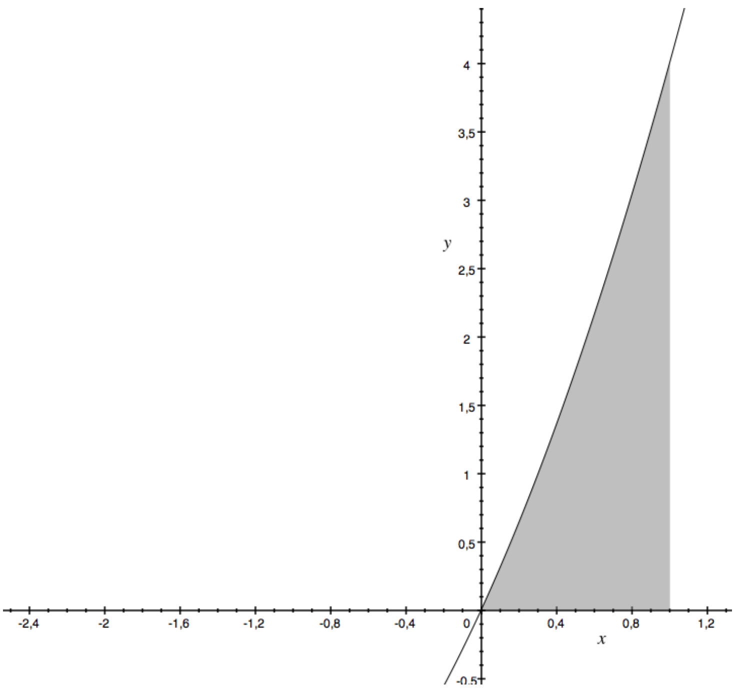
Exemple: Calculer $I = \int_0^1 x^2 + 3xdx$

II. Le point de vue graphique

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle I, de courbe représentative C_f dans un repère . L'aire, exprimée en unités d'aires, de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b f(x)dx$$



III. Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. a, b, et c trois réels quelconques, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Linéarité :
$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad et \quad \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$
- Ordre des bornes :
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- Relation de Chasles :
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
- Positivité :
Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x)$ est positif alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Ordre :
Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

IV. Valeur moyenne

IV.1. Définition

Définition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a,b]. On appelle ***valeur moyenne de*** *f sur [a,b] le nombre défini par*
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemple: Soit f définie par $f(t) = \sin t$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0, \pi]$.

Remarque: Soit D la droite d'équation $y = \mu$. On retrouve graphiquement une interprétation de la valeur moyenne par des égalités d'aires.

IV.2. Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction dérivable sur [a,b] telle que pour tout x de [a,b] $m \leq f(x) \leq M$. Alors on a
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

V. Calcul de volumes

V.1. Cas général

Théorème 2

Dans l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un solide limité par deux plans parallèles au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le plan de cote a (d'équation $z = a$) et le plan de cote b (d'équation $z = b$). On note $S(z)$ l'intersection du solide avec tout plan parallèle à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de cote z. Alors le volume du solide *en unités de volumes est :*

$$V = \int_a^b S(z)dz$$

V.2. Volume de révolution

Théorème 3

Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère une partie du plan limitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe (Ox), et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. En tournant autour de l'axe (Ox), cette partie du plan engendre un solide de révolution dont le volume en unités de volume est :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$