Matrices

I. Exemple & Définition

Voici les tarifs postaux en vigueur en 2012 :

TARIFS COURRIER (LETTRE) AVEC / SANS RECOMMANDÉ pour un envoi vers la France Métropolitaine, Corse, Monaco.				
Poids / Valeur recommandé	**Sans**	**R1***	**R2***	**R3***
jusqu'à 20 g	0,60 €	3,38 €	3,98 €	4,88 €
jusqu'à 50 g	1,00 €	3,78 €	4,38 €	5,28 €
jusqu'à 100 g	1,45 €	4,23 €	4,83 €	5,73 €

On peut présenter ces données sous forme d'un tableau de nombres, qu'on appelle matrice :

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 3,38 & 3,98 & 4,88 \\ 1 & 3,78 & 4,38 & 5,28 \\ 1,45 & 4,23 & 4,83 & 5,73 \end{pmatrix}$$

On désigne généralement une matrice par une lettre majuscule et on note a_{ij} le nombre situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne.

Exemple: Pour la matrice A ci-dessus, on note $a_{11} = 0,6$; $a_{12} = 3,38$; $a_{21} = 1$; $a_{34} = 5,73$. A est une matrice rectangulaire à 3 lignes et 4 colonnes.

Définition 1

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation : on écrit la matrice A :

$$A = (a_{ij})$$

a_{ij} est le terme général de la matrice A.

II. Calcul matriciel

II.1. Addition

Exemple:
Soit A la matrice des tarifs postaux. Supposons que tous ces tarifs subissent chacun une augmentation.
Soit B la matrice donnant ces augmentations :

$$B = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,06 & 0,09 & 0,25 \\ 0,31 & 0,41 & 0,28 & 0,28 \\ 0,45 & 0,23 & 0,83 & 0,73 \end{pmatrix}$$

Si on note C la matrice donnant les nouveaux tarifs, on a $C = A + B$, soit :

$$C = \begin{pmatrix} 0,6 & 3,38 & 3,98 & 4,88 \\ 1 & 3,78 & 4,38 & 5,28 \\ 1,45 & 4,23 & 4,83 & 5,73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,04 & 0,06 & 0,09 & 0,25 \\ 0,31 & 0,41 & 0,28 & 0,28 \\ 0,45 & 0,23 & 0,83 & 0,73 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,64 & 3,44 & 4,07 & 5,13 \\ 1,31 & 4,19 & 4,66 & 5,56 \\ 1,90 & 4,46 & 5,66 & 6,46 \end{pmatrix}$$

Définition 2

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices à n lignes et p colonnes. La matrice somme de A et B est la matrice $A + B = (c_{ij})$ à n lignes et p colonnes telle que, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple: Additionner les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

II.2. Multiplication d'une matrice par un réel

Supposons, dans l'exemple précédent, que les tarifs postaux soient augmentés uniformément de 10 %. Si on note D la matrice des nouveaux tarifs, on a :

$$D = 1,1A$$

soit

$$D = 1,1 \begin{pmatrix} 0,6 & 3,38 & 3,98 & 4,88 \\ 1 & 3,78 & 4,38 & 5,28 \\ 1,45 & 4,23 & 4,83 & 5,73 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0,66 & 3,718 & 4,378 & 5,368 \\ 1,1 & 4,158 & 4,818 & 5,808 \\ 1,595 & 4,653 & 5,313 & 6,303 \end{pmatrix}$$

Définition 3

Soit $A = (a_{ij})$ à n lignes et p colonnes. La matrice somme de A et λ un nombre réel. Le produit de la matrice A par le réel λ est la matrice $\lambda A = (d_{ij})$ à n lignes et p colonnes telle que, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}$$

II.3. Multiplication de deux matrices

Exemple: Dans une entreprise de vente de pièces détachées pour l'automobile, le volume du courrier traité par deux services S_1 et S_2 pour une semaine donnée est indiqué dans le tableau suivant :

	S_1	S_2
sans	50	7
R1	35	3
R2	15	4
R3	10	2

Pour calculer le coût global des affranchissements pour chacun des services S_1 et S_2, suivant le poids du courrier, on peut disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 50 & 7 \\ 35 & 3 \\ 15 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,04 & 0,06 & 0,09 & 0,25 \\ 0,31 & 0,41 & 0,28 & 0,28 \\ 0,45 & 0,23 & 0,83 & 0,73 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7,95 & 1,32 \\ 36,85 & 5,08 \\ 50,3 & 8,62 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{ij})$ une matrice à p lignes et q colonnes. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $AB = (c_{ij})$ à n lignes et q colonnes telle que, pour tout couple d'indices (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ip}b_{pk}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarque: La mutiplication matricielle n'est pas commutative ! De manière générale, $AB \neq BA$