Polynômes et second degré

I. Définition :

On appelle fonction polynôme de degré n toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_p x^p + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- a_0, a_1, ..., a_n sont appelés coefficients de P,
- le terme $a_p x^p$ le monôme de degré p ,
- $n = deg(P)$.

Exemples :
- La fonction P définie par $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$ est une fonction polynôme de degré 6.
- La fonction affine $ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1.
- La fonction constante k avec $k \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 0.
- La fonction Q définie par : $Q(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction polynôme.

Remarque : si P et Q sont non nuls $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$

II. Egalité de deux polynômes

Soient P et Q deux fonctions polynômes, $P = Q$ signifie que :
- $deg(P) = deg(Q)$,
- les coefficients des termes de même degré de P et Q sont égaux.

Cas particulier : $P = 0$ (polynôme nul) signifie que tous ses coefficients sont nuls.

Exemple : Les polynômes $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et $R(x) = ax^2 + bx + c$ sont égaux pour $a = 2$ $b = -3$ $c = 4$.

Exercice : Sur une copie partiellement effacée, on peut voir :

$$2x^3 - x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(...)$$

Comment retrouver le facteur inconnu ?

III. Racine d'un polynôme

Définition : On appelle racine d'un polynôme toute solution de l'équation $P(x) = 0$
Exemple :
1 est une racine de $P(x) = x^2 + 2x - 3$
3 est une racine de $P(x) = (x - 3)(x + 2)$

IV. Cas du second degré

IV.1. Résolution d'une équation du second degré

On cherche à résoudre une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad avec \quad a \neq 0$$

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\delta}{4a^2} = 0 \qquad en \quad posant \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

On pourra distinguer 3 cas.

Théorème 1

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On appelle discriminant de l'équation le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- *Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$*

Exemple : Résoudre $x^2 + 2x - 8 = 0$.

IV.2. Résolution d'une inéquation du second degré

Théorème 2

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

- *Si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur des racines" c'est à dire sur $]-\infty; x_1[\cap]x_2; +\infty[$*
- *Si $\Delta = 0$, $P(x)$ est du signe de a.*
- *Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est du signe de a.*

Exemple : Résoudre $x^2 + 2x - 8 > 0$.

IV.3. Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré

Théorème 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. Si P admet deux racines :

- *leur somme S vaut $\frac{-b}{a}$*
- *leur produit P vaut $\frac{c}{a}$*

démonstration...

Exemple : L'équation $x^2 + x - 2 = 0$ admet une solution évidente. Trouver les deux solutions.