DM n°3

Un tétraèdre

Question préliminaire:

Soit un triangle équilatéral ABC de côté *c.* On appelle H le pied de la hauteur issue de A.

D'après Pythagore dans le triangle ABH, la longueur AH vérifie $AH^2+HB^2=AB^2=c^2$

Comme $HB=\frac{c}{2}$ on a $AH^2=c^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2$ soit $AH^2=\frac{3c^2}{4}$ c'est à dire $AH=\sqrt{3}\frac{c}{2}$ car AH est une quantité positive.

L'aire du triangle ABC est donnée par $\mathcal{A}=\frac{AH\times c}{2}$ donc $\mathcal{A}=\frac{\frac{\sqrt{3}c}{2}}{2}=\sqrt{3}\frac{c^2}{4}$

Problème:

1. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABD, on a les droites *(AB)* et *(IJ)* parallèles.
2. De plus $IJ=\frac{AB}{2}$. Le périmètre P' du triangle *IJK* vaut $IJ+JK+IK$ donc, en appliquant le

   théorème des milieux dans les triangles *ADC* et *BCD*, on a $P'=\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}+\frac{AC}{2}$

   d'où $P'=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{P}{2}$
3. IJK est isocèle car $IJ=\frac{AB}{2}$, $JK=\frac{BC}{2}$ et $IK=\frac{AC}{2}$ et $AB=BC=AC$ (tétraèdre régulier).

   D'après la question préliminaire, l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle *IJK* vaut donc $\sqrt{3}\frac{IJ^2}{4}$ et l'aire $\mathcal{A}$ du triangle

   ABC vaut $\sqrt{3}\frac{AB^2}{2}$. Or $IJ=\frac{AB}{2}$ donc $\mathcal{A}'=\sqrt{3}\frac{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{4}=\sqrt{3}\left(\frac{AB^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{3}\frac{AB^2}{16}$

   donc $\mathcal{A}'=\frac{\mathcal{A}}{8}$