DEVOIR SURVEILLE n°1

Exercice 1: *(4 points)*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$2\,y' + y = 0$$
2. Résoudre sur]0;+∞[l'équation différentielle
$$xy' + y = 0$$
3. a) Déterminer les nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel x,
$$\frac{1-x}{1+x} = a + \frac{b}{x+1}$$
   b) Résoudre sur]-1;+∞[l'équation différentielle
$$(x+1)\,y' + (x-1)\,y = 0$$

Exercice 2: *(5 points)*

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle

(E) $$4\,v' + v = 3\,e^{\frac{x}{2}} - 1$$

avec la condition initiale $v_0 = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle $4\,v' + v = 0$
2. Déterminer les constantes *A* et *B* pour que la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par
$$u(x) = A\,e^{\frac{x}{2}} + B$$
   soit une solution particulière de l'équation *(E)*.
3. Résoudre l'équation *(E)* sur $\mathbb{R}$
4. Déterminer la solution particulière vérifiant $v(0) = 0$.

Exercice 3: *(11 points)*

1. On note $y(t)$ la température en degrés Celsius d'une réaction chimique en fonction du temps *t*, *t* étant exprimé en heures.
   Après étude, on constate que la température est solution de l'équation différentielle
   (E) $$y' + y = e^{-0,25\,t}$$
   avec la condition initiale $y(0) = 20$

a) Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation

(E_0) $$y' + y = 0$$

b) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction g définie par $g(t) = k\,e^{-0,25\,t}$ soit une solution particulière de l'équation *(E)*.

c) En déduire la solution générale de *(E)*.

d) Déterminer la solution de *(E)* satisfaisant la condition initiale.

2. On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ particulière

$$f(t) = \frac{1}{3}\left(56\,e^{-t} + 4\,e^{-0,25\,t}\right)$$

a) Étudier la limite de *f* quand *t* tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la fonction dérivée de *f*

c) Étudier le signe de $f'(t)$ pour $t \in [0;+\infty[$. En déduire le tableau de variation de *f*.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités graphiques: 2 cm ou 2 grands carreaux pour 1 h sur l'axe des abscisses, et 1 cm ou 1 grand carreau pour 1 degré sur l'axe des ordonnées) représenter graphiquement la fonction *f*.