DEVOIR SURVEILLE n°1

corrigé

Exercice 1: *(4 points)*

1. L'ensemble des fonctions solutions sont de la forme $y(x)=k\,e^{-\frac{x}{2}}$ avec $k\in\mathbb{R}$

2. $xy'+y=0 \Leftrightarrow y'+\frac{1}{x}y=0$ une primitive de $-\frac{1}{x}$ étant $-\ln x$ on trouve:

   $y(x)=k\,e^{-\ln x}=\frac{k}{x}$ avec $k\in\mathbb{R}$

3. a) $\frac{1-x}{1+x}=\frac{a(x+1)+b}{x+1}$ donc $1-x=ax+a+b \Leftrightarrow x(a+1)+a+b-1=0$ d'où $a=-1$ et $b=2$

   b) $(x+1)y'+(x-1)y=0 \Leftrightarrow y'+\frac{x-1}{x+1}y=0$

   On cherche une primitive de $\frac{x-1}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}$ (d'après a)) on trouve $-x+2\ln(x+1)$

   On a donc $y(x)=k\,e^{-x+2\ln(x+1)}=k\,e^{-x}\,e^{\ln(x+1)^2}=k(x+1)^2\,e^{-x}$

Exercice 2: *(5 points)*

1. $4v'+v=0 \Leftrightarrow v'+\frac{1}{4}v=0$ l'ensemble des fonctions solutions sont de la forme $y(x)=k\,e^{-\frac{x}{4}}$ $k\in\mathbb{R}$

2. $u(x)=A\,e^{\frac{x}{2}}+B$ donc $u'(x)=\frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}}$

   u est solution de *(E)* $\Leftrightarrow$ $4\frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}}+A\,e^{\frac{x}{2}}+B=3\,e^{\frac{x}{2}}-1$ ce qui donne $3A\,e^{\frac{x}{2}}+B=3\,e^{\frac{x}{2}}-1$

   et on obtient $A=1$ et $B=-1$ et donc $u(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$

3. L'équation *(E)* a donc pour solutions les fonctions de la forme: $v(x)=e^{\frac{x}{2}}-1+k\,e^{-\frac{x}{4}}$

4. $v(0)=0 \Leftrightarrow 1-1+k=0 \Leftrightarrow k=0$ La solution particulière est donc $v(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$

Exercice 3: *(11 points)*

1. a) $y(x)=k\,e^{-x}$ avec $k\in\mathbb{R}$

   b) $g(t)=k\,e^{-0,25\,t}$ donc $g'(t)=-0,25\,k\,e^{-0,25\,t}$

   $g'+g=e^{-0,25\,t} \Leftrightarrow -0,25\,k\,e^{-0,25\,t}+k\,e^{-0,25\,t}=e^{-0,25\,t} \Leftrightarrow -0,25\,k+k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{0,75}=\frac{4}{3}$

   donc $g(x)=\frac{4}{3}e^{-0,25\,x}$ est une solution particulière de (E).

c) La solution générale est donc de la forme $y(x)=\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-0,25\,x}+k\,\mathrm{e}^{-x}$

d) $y(0)=20 \iff \dfrac{4}{3}+k=20 \iff k=20-\dfrac{4}{3}=\dfrac{56}{3}$

La solution particulière cherchée est donc $y(x)=\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-0,25\,x}+\dfrac{56}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$

2. a) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}=0$

   b) $f\,'(t)=\dfrac{1}{3}\left(-56\,\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-0,25\,t}\right)$

   c) $f\,'(t)$ est donc toujours négatif pour $t\in[0\,;+\infty[$ ce qui donne le tableau de variation suivant:

x	-∞	+∞
signe de $f\,'$	-	
f	20 ↘	0