

DEVOIR SURVEILLE n°4

Exercice 1:

Une boîte contient 10 boules. Sur chacune d'elles on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-dessous:

Nombre inscrit	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10 euros, tire une boule au hasard, et reçoit la somme (en euros) inscrite sur la boule.

1. Le joueur joue une fois. On appelle p_1 la probabilité qu'il perde de l'argent (c'est à dire qu'il reçoive moins de 10 euros à l'issue du tirage) et p_2 la probabilité qu'il reçoive plus de 10 euros. Donner p_1 et p_2 .
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (une perte est un « gain » négatif). Par exemple: si un joueur tire le nombre 12, son « gain » est +2; s'il tire le 6, son « gain » est -4.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
 - b) Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.
 - c) Calculer son espérance mathématique $E(X)$. Que représente $E(X)$ pour le joueur ?
 - d) Calculer la variance et l'écart-type de X .
3. Il s'agit maintenant, en changeant le nombre inscrit sur UNE boule, de rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire associée doit être nulle). Proposer une solution.

Exercice 2:

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard un chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

A : " La chaudière est à cheminée " ;

B : " La chaudière est à ventouse " ;

D : "La chaudière présente un défaut ".

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$ et $P(D/B)$.
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\bar{D})$.

Problème:**Partie A – Questions préliminaires**

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
 b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe, pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
 c) Dresser le tableau de variation de la fonction g .
2. En utilisant 1c), montrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x) < 1$.

Partie B – Etude et représentation graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $f(x) = e^{-x} + \ln x$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f .
 b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 c) Montrer que $f'(x) = \frac{1-g(x)}{x}$.
 En utilisant la question A.2., montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
 d) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, notée x_0 , dans $]0;+\infty[$.
 Montrer que $0,5 < x_0 < 0,6$.
3. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie C – Calcul d'aire

Soit G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x$.

1. Calculer $G'(x)$. En déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer, en cm^2 , l'aire S de la partie du plan comprise, sur le graphique, entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

On donnera la valeur exacte de S et sa valeur arrondie à 0,01 cm^2 près.

Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2 , de la surface comprise, sur le graphique, entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.