DEVOIR SURVEILLE n°4

corrigé

Exercice 1: (5 points)

1. $p_1 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$ et $p_2 = \frac{6}{10}$

2. a) valeurs prises par X : {-5;-4;0;1;2;3;4}

   b) loi de probabilité de X:

$X = x_i$	-5	-4	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

   c) $E(X) = \frac{1}{10}(-5 + 2\times -4 + 3 + 2 + 3 + 4) = -\frac{1}{10}$ représente la perte de 10 centimes d'euros si le joueur fait de nombreux tirages.

   d)

$\left(x_i + \frac{1}{10}\right)^2$	-5	-4	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. Pour rendre le jeu équitable, il faut que $E(X) = 0$, en remplaçant la boule marquée 0 par une boule marquée 1, on aura bien $E(X) = 0$

Exercice 2: (5 points)

1. $P(A) = \frac{900}{1500} = \frac{3}{5}$ $P(B) = \frac{600}{1500} = \frac{2}{5}$ $P_A(D) = \frac{1}{100}$ $P_B(D) = \frac{5}{100}$

2. $P(D \cap A) = P_A(D) \times P(A) = \frac{3}{500}$ $P(D \cap B) = P_B(D) \times P(B) = \frac{1}{50}$

3. $D \cap A$ représentent les chauières à cheminée présentant un défaut et $D \cap B$ les chaudières à ventouse présentant un défaut. Ils sont bien incompatibles.

   Donc $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = \frac{3}{500} + \frac{1}{50} = \frac{13}{500} = 0{,}026$ et $P(\overline{D}) = 1 - \frac{13}{500} = \frac{487}{500} = 0{,}974$

Problème: (10 points)

Partie A

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

   b) $g'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ donc $g'(x)$ est positif su $[0\,;1]$ et négatif sur $[1\,;+\infty[$

   c)

x	0	1	$+\infty$
signe de g'	+		-
g	0 ↗	1/e	↘ 0

2. D'après le tableau de variation, on voit clairement que $g(x) \leqslant \dfrac{1}{e} < 1$

Partie B

1. a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en 0.

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   c) $f'(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x\,e^{-x}+1}{x} = \dfrac{1-g(x)}{x}$

   On a montré dans la question A.2 que $g(x) < 1$ sur $[0\,;+\infty[$ donc $1-g(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

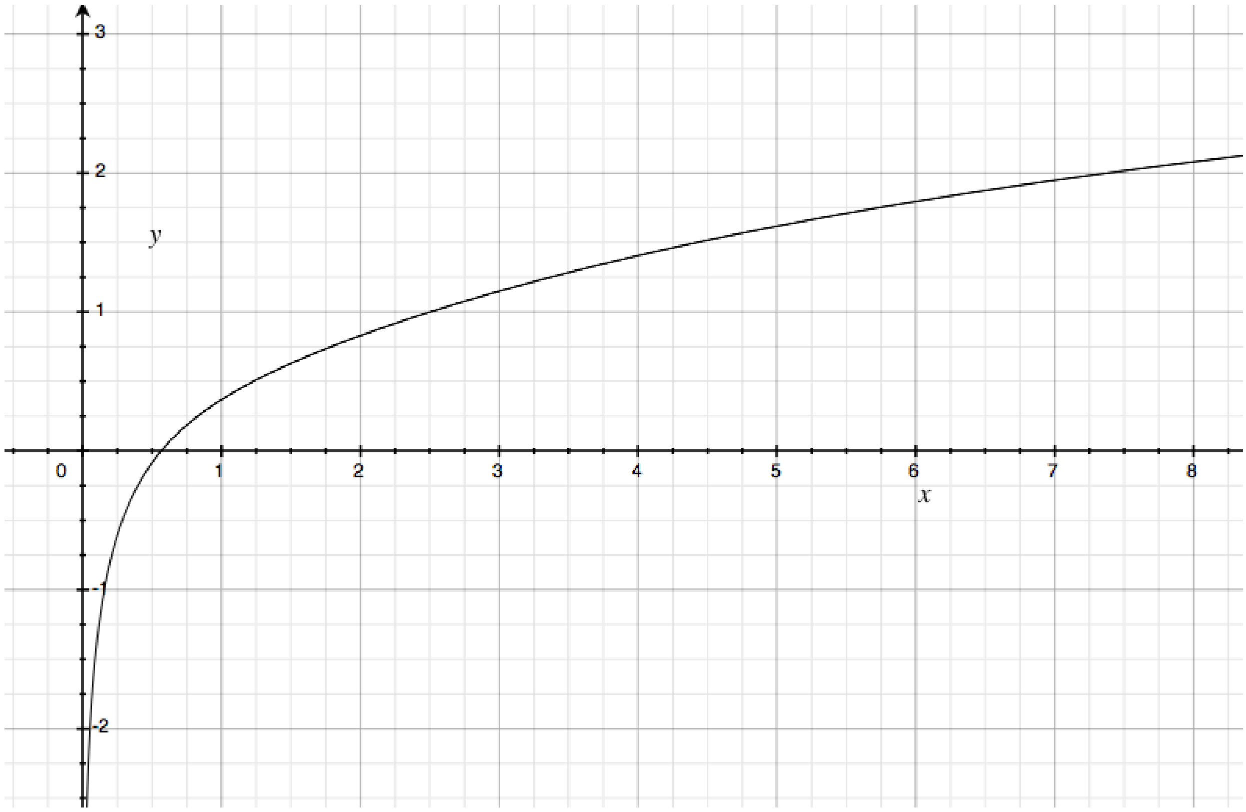
   On en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

   d)

x	0	$+\infty$
signe de f'	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. D'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$

   On a $f(0{,}5) < 0$ et $f(0{,}6) > 0$ donc $0{,}5 < x_0 < 0{,}6$



Partie C

1. $G'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$ donc $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x \ln x - x$ est une primitive de f.

2. On calcule les intégrales suivantes:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-x} + x \ln x - x\right] = -\mathrm{e}^{-2} + 2 \ln 2 - 2 + \mathrm{e}^{-1} + 1 = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} + 2 \ln 2 - 1$$

valeur exacte de S en $cm^2 = 16\left(-\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} + 2 \ln 2 - 1\right)$

valeur arrondie à 0,01 cm^2 près = 9,90 cm^2

$$\int_1^e f(x)\,dx = -\mathrm{e}^{-e} + e - e + \mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-e} + \mathrm{e}^{-1}$$

valeur exacte de l'aire en $cm^2 = 16\left(1 - \mathrm{e}^{-e} + \mathrm{e}^{-1}\right)$