DEVOIR SURVEILLE n°4

corrigé

Exercice 1: *(4 points)*

$P_C(Y) = \dfrac{P(C \cap Y)}{P(C)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}4} = 0{,}875$ et $P_Y(\overline{C}) = \dfrac{P(\overline{C} \cap Y)}{P(Y)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3$

Exercice 2: *(5 points)*

1. $4v' + v = 0 \Leftrightarrow v' + \dfrac{1}{4}v = 0$ l'ensemble des fonctions solutions sont de la forme $y(x) = k\,e^{-\frac{x}{4}}$ $k \in \mathbb{R}$

2. $u(x) = A\,e^{\frac{x}{2}} + B$ donc $u'(x) = \dfrac{A}{2}\,e^{\frac{x}{2}}$

   u est solution de *(E)* $\Leftrightarrow$ $4\dfrac{A}{2}\,e^{\frac{x}{2}} + A\,e^{\frac{x}{2}} + B = 3\,e^{\frac{x}{2}} - 1$ ce qui donne $3\,A\,e^{\frac{x}{2}} + B = 3\,e^{\frac{x}{2}} - 1$

   et on obtient $A = 1$ et $B = -1$ et donc $u(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$

3. L'équation *(E)* a donc pour solutions les fonctions de la forme: $v(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 + k\,e^{-\frac{x}{4}}$

4. $v(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ La solution particulière est donc $v(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$

Exercice 3: *(11 points)*

1. a) $y(x) = k\,e^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

   b) $g(t) = k\,e^{-0{,}25t}$ donc $g'(t) = -0{,}25\,k\,e^{-0{,}25t}$

   $g' + g = e^{-0{,}25t} \Leftrightarrow -0{,}25\,k\,e^{-0{,}25t} + k\,e^{-0{,}25t} = e^{-0{,}25t} \Leftrightarrow -0{,}25\,k + k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{0{,}75} = \dfrac{4}{3}$

   donc $g(x) = \dfrac{4}{3}\,e^{-0{,}25x}$ est une solution particulière de (E).

   c) La solution générale est donc de la forme $y(x) = \dfrac{4}{3}\,e^{-0{,}25x} + k\,e^{-x}$

   d) $y(0) = 20 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} + k = 20 \Leftrightarrow k = 20 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{56}{3}$

   La solution particulière cherchée est donc $y(x) = \dfrac{4}{3}\,e^{-0{,}25x} + \dfrac{56}{3}\,e^{-x}$

2. a) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$

b) $f'(t)=\frac{1}{3}\left(-56\,\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-0,25\,t}\right)$

c) $f'(t)$ est donc toujours négatif pour $t\in[0\,;+\infty[$ ce qui donne le tableau de variation suivant:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de f'	-
f	20 $\searrow$ 0