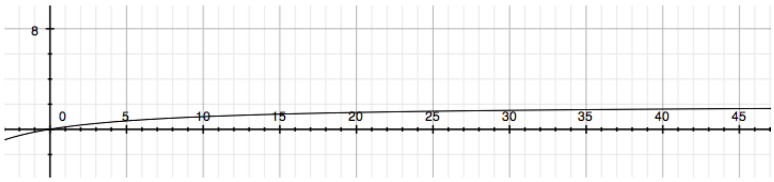
Limites

I. Asymptotes et limites

I.1. Asymptote horizontale, limite finie à l'infini

Exemple: $f(x) = \dfrac{2x}{x+10}$

Approche graphique



La courbe semble se rapprocher de la droite $y = 2$ plus x est grand.

Approche numérique

x	0	10	20	30	40	50	100
$\lvert f(x) - 2 \rvert$	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,18

Les valeurs de $f(x)$ semblent de plus en plus proches de 2 lorsque x devient grand.
On note

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+10} = 2$$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; +\infty[$ avec a un nombre réel. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à l lorsque la distance entre $f(x)$ et l est aussi proche de zéro que l'on veut, dès que x est assez grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

On dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

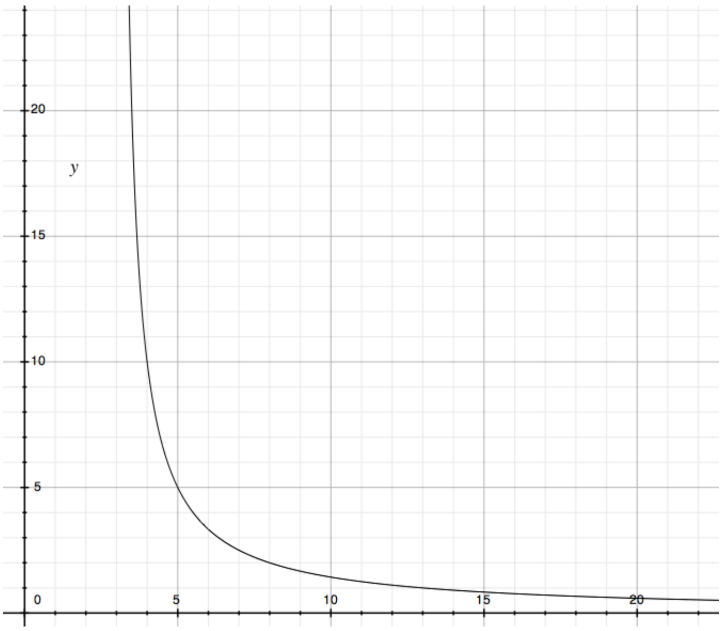
Remarque: On définit de la même manière

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

I.2. Asymptote verticale, limite infinie en un point

Exemple: $f(x) = \dfrac{10}{x-3}$

Approche graphique



La courbe semble se rapprocher de la droite $x = 3$.

Approche numérique

x	3,5	3,1	3,05	3,01	3,001	3,0001
$f(x)$	20	100	200	1000	10 000	100 000

Les valeurs de $f(x)$ semblent de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 3.
On note

$$\lim_{x\to 3} \frac{10}{x-3} = +\infty$$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ avec a et b nombres réels. On dit que la limite de f en a est égale à $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a. On note

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f en a.

Remarque: On définit de la même manière $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et on peut utiliser les notations

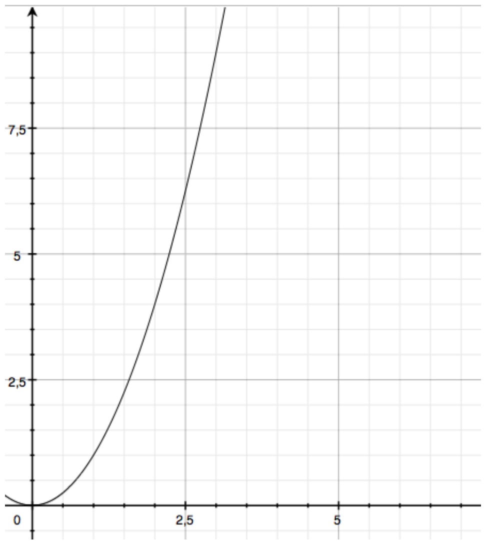
$$\lim_{x\to a(x<a)} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a(x>a)} f(x)$$

pour distinguer les deux limites "à gauche" et "à droite" de a.

II. Limite infinie en l'infini

Exemple: $f(x) = x^2$

Approche graphique



Il semble que quelque soit le nombre A, on peut trouver un x où $f(x)$ est supérieur à A.

On note

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;+\infty[$, où a est un nombre réel. On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque: On définit de la même manière $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

III. Opérations sur les limites

III.1. Limite d'une somme

$\lim g / \lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	l+l'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

III.2. Limite d'un produit

$\lim g / \lim f$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

III.3. Limite d'un quotient

$\lim g / \lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	l/l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

III.4. Les 4 formes indéterminées

$0 \times \infty$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$