Fonctions logarithmes

I. Définition :

Définition 1

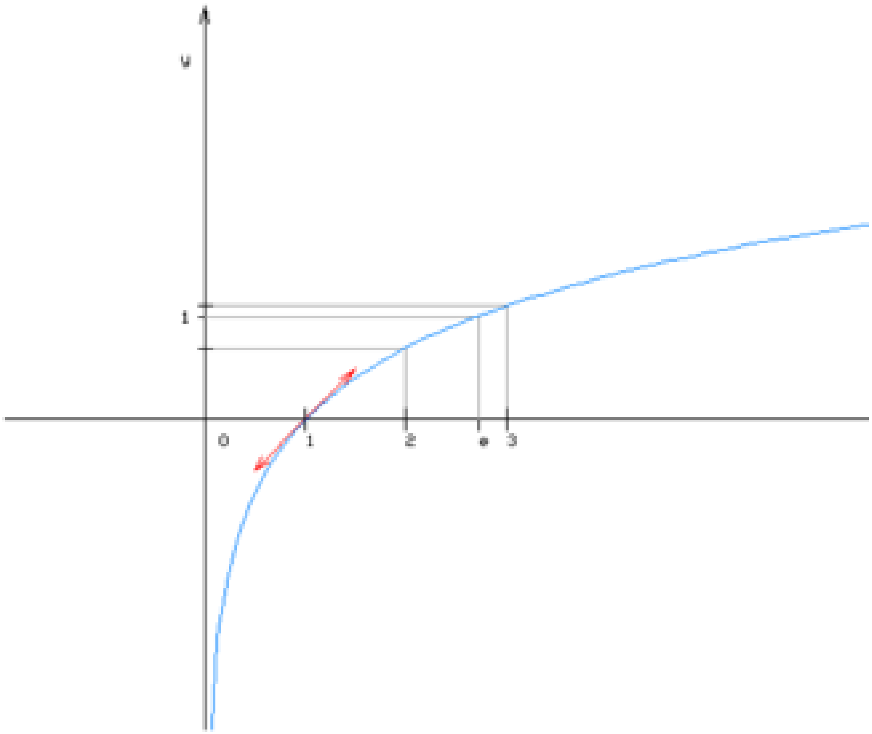
La fonction logarithme népérien est LA primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ *sur* $]0;+\infty[$*, qui prend la valeur 0 en 1.*

On note cette fonction ln.

II. Propriétés immédiates

- $D_f =]0;+\infty[$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$

III. Représentation graphique



La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

On note e le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$.

IV. Propriétés algébriques

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

démonstration : on montre que $g(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$ est constante.

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^p = p \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$$

V. Applications

V.1. Transformations d'écritures

1. Simplifier $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
2. Simplifier $4\ln(\sqrt{2}+1) - 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2$

V.2. Résolution d'équations et d'inéquations

1. $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$
2. $(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $2,1^n \leq 3200$