Lois à densité

I. Loi uniforme

Définition 1

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [a ;b] notée $U(a;b)$, si pour tous réels c et d de l'intervalle, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Cette probabilité est représentée par l'aire du rectangle délimité par la droite $y = \frac{1}{b-a}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$. On peut donc écrire aussi :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx \qquad \text{avec} \qquad f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Remarque: La fonction f est appelée densité de la loi.

II. Loi exponentielle

Définition 2

Soit λ un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, si pour tous réels c et d, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx \qquad \text{avec} \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si } x \geq 0$$

Remarque: La fonction f est appelée densité de la loi.

III. Loi normale

Définition 3

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale, notée $N(\mu, \sigma)$, si pour tous réels c et d, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx \qquad \text{avec} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

Remarque: La fonction f est appelée densité de la loi. *Remarque:* Si $np > 1$, alors la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de même espérance et de même écart type, $N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

IV. Espérance et écart type

IV.1. Loi uniforme

Théorème 1

Si X suit une loi uniforme, l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ sont donnés par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

IV.2. Loi exponentielle

Théorème 2

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance $E(X)$ est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Remarque: On rappelle que l'espérance représente une moyenne des valeurs mesurées par X.