Suites numériques

I. Limite d'une suite

I.1. Limite infinie

Définition 1

Soit (U_n) une suite réelle. On dit que la suite (U_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes U_n sont supérieurs à 10^p. On note alors

$$\lim_{n\to\ +\infty} U_n = +\infty$$

Exemple: Pour tout entier k non nul, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (Limites de référence)

Remarque: On définit de la même manière $\lim\limits_{n\to\ +\infty} U_n = -\infty$ lorsque les termes sont inférieurs à -10^p à partir d'un certain rang.

I.2. Limite finie

Définition 2

Soit (U_n) une suite réelle et l un nombre réel. On dit que la suite (U_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes U_n sont à une distance de l inférieure à 10^{-p}. On note alors

$$\lim_{n\to\ +\infty} U_n = l$$

II. Cas des suites géométriques

II.1. Rappels

Définition 3

On dit qu'une suite (U_n) est **géométrique** *lorsqu'il existe un réel q tel que*

$$U_{n+1} = qU_n \quad \text{pour tout entier } n.$$

Le nombre q est appelé **raison** *de la suite géométrique.*

Théorème 1

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers n et p, nous avons :

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

Remarque: En pratique, pour montrer qu'une suite est géométrique, on étudie souvent le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

II.2. Limites

Théorème 2

Soit q un nombre réel.

$$\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

$$\text{Si } 0 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Exemple: $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$,

Théorème 3

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q > 0$.
- *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$*
- *Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$*
- *Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est une suite constante égale à U_0 et sa limite est U_0.*

II.3. Somme de termes consécutifs

Théorème 4

Si n est un entier naturel et q un réel différent de 1, alors :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Notation : $1 + q + q^2 + ... + q^n$ se note $\sum_{i=0}^{n} q^i$ et se lit "somme, pour i variant de 0 à n, des q^i"

Théorème 5

Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme U_0.

$$U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \times U_0$$