Suites numériques

I. Définition et notations

Définition 1

Toute fonction de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est appelée* **suite numérique.**

Exemple: $U(n) = \dfrac{1}{n}$, $V(n) = 2^n$.

Notation : Au lieu de $U(n)$ on note l'image de n par U_n. Cette notation est appelée notation indicée.

Exemple: Avec les suites précédentes, on écrira $U_1 = 1$, $U_2 = \dfrac{1}{2}$, etc... et $V_1 = 2$, $V_2 = 4$, etc...

II. Suites arithmétiques

Définition 2

On dit qu'une suite (U_n) *est* **arithmétique** *lorsqu'il existe un réel* r *tel que*

$$U_{n+1} = U_n + r \quad \text{pour tout entier } n.$$

Le nombre r *est appelé* **raison** *de la suite arithmétique.*

Exemple: $U_n = 3n + 4$

Remarque: En pratique, pour montrer qu'une suite est arithmétique, on étudie souvent la différence $U_{n+1} - U_n$.

Théorème 1

Soit (U_n) *une suite arithmétique de raison* r*. Alors pour tous entiers* n *et* p*, nous avons :*

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

Théorème 2

Une somme remarquable :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Notation : $1 + 2 + 3 + ... + n$ *se note* $\sum_{i=1}^{n} i$ *et se lit "somme des* i*, pour* i *variant de 1 à* n*"*

Théorème 3

La somme des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme U_0 *s'exprime par :*

$$S_n = (n+1)(\frac{U_0 + U_n}{2})$$

III. Suites géométriques

Définition 3

On dit qu'une suite (U_n) est **géométrique** *lorsqu'il existe un réel q tel que*

$$U_{n+1} = qU_n \quad \textit{pour tout entier } n.$$

Le nombre q est appelé **raison** *de la suite géométrique.*

Exemple: $U_n = 4^n$

Remarque: En pratique, pour montrer qu'une suite est géométrique, on étudie souvent le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

Théorème 4

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers n et p, nous avons :

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

Théorème 5

Si n est un entier naturel et q un réel différent de 1, alors :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Notation : $1 + q + q^2 + ... + q^n$ se note $\sum_{i=0}^{n} q^i$ et se lit "somme, pour i variant de 0 à n, des q^i"

Théorème 6

La somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme U_0 s'exprime par :

$$S_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

IV. Limite d'une suite

IV.1. Limite infinie

Définition 4

Soit (U_n) une suite réelle. On dit que la suite (U_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes U_n sont supérieurs à 10^p. On note alors

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

Exemple: Pour tout entier k non nul, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (Limites de référence)

Remarque: On définit de la même manière $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ lorsque les termes sont inférieurs à -10^p à partir d'un certain rang.

IV.2. Limite finie

Définition 5

Soit (U_n) une suite réelle et l un nombre réel. On dit que la suite (U_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes U_n sont à une distance de l inférieure à 10^{-p}. On note alors

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

IV.3. Cas des suites géométriques

Théorème 7

Soit q un nombre réel.

$$\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

$$\text{Si } 0 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

Exemple: $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} 0,3^n = 0$,

Théorème 8

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q > 0$.

- *Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$*
- *Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$*
- *Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est une suite constante égale à U_0 et sa limite est U_0.*