

Test

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bouchon, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 22$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,025$ mm.

Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle $[21,95; 22,05]$.

Les trois questions de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Quelle est la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable ?
2. Dans cette question, on considère que la probabilité qu'un bouchon soit défectueux est $q = 0,05$.

On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise). On nomme Y la variable aléatoire mesurant le nombre de bouchons défectueux d'un tel échantillon.

- (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Déterminer l'espérance mathématique de la variable Y .
 - (b) On approche Y par une variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Quelle est la valeur du paramètre λ ?
Calculer la probabilité que l'échantillon prélevé contienne exactement 10 bouchons défectueux.
3. En vue du contrôle de réglage de la machine, on prélève régulièrement dans la production des échantillons de 100 bouchons.
On appelle \bar{X} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 bouchons, associe le diamètre moyen des bouchons de cet échantillon.
Lorsque la machine est bien réglée, \bar{X} suit la loi normale de paramètres m et $\sigma' = \sigma/10$ (on rappelle que $m = 22$ et $\sigma = 0,025$).
- (a) Déterminer le réel a tel que $P(22 - a \leq \bar{X} \leq 22 + a) = 0,95$.
 - (b) Sur un échantillon de 100 bouchons, on a les résultats suivants (les mesures des diamètres étant réparties en classe d'amplitude 0,02 mm) :

Classes de diamètres	effectif correspondant
$[21,93; 21,95[$	3
$[21,95; 21,97[$	7
$[21,97; 21,99[$	27
$[21,99; 22,01[$	30
$[22,01; 22,03[$	24
$[22,03; 22,05[$	7
$[22,05; 22,07[$	2

En supposant que tous les bouchons d'une classe ont pour diamètre la valeur centrale de cette classe, donner la moyenne et l'écart-type de cette série (aucune justification demandée; résultats arrondis à l'ordre 10^{-4}).

En utilisant la question précédente, peut-on accepter au seuil de risque 5%, l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée ?